EEN OLYMPIADE-OPDRACHT BEDENKEN

In deze Olympiade-artikelen bekijken we meestal wiskundige puzzels vanuit het perspectief van degene die het antwoord op de vraag wil vinden. Er is echter een tweede interessant perspectief. Dat is het perspectief van degene die de vraag bedenkt. Hoe bedenk je een vraag voor een wiskundewedstrijd? En heb je bij het oplossen van problemen ook iets aan dit perspectief? Deze twee vragen hoop ik in dit artikel (deels) te beantwoorden.

door
Peter Ypma

Vaak begint het bedenken van een puzzel bij iets dat mij opvalt. Ik ben bijvoorbeeld 6666^2 aan het uitrekenen en ik zie dat het antwoord 44435556 een grappige structuur heeft met drie vieren naast elkaar en daarna drie vijven naast elkaar. Op dat moment vraag ik mij af of zo'n structuur altijd optreedt als je een getal met alleen maar zessen met zichzelf vermenigvuldigt. Dit ga ik dan eens bekijken door de volgende sommen uit te rekenen:

$$\begin{aligned} 6^2 &= 36 \\ 66^2 &= 4356 \\ 666^2 &= 443556 \\ 6666^2 &= 44435556 \\ 66666^2 &= 4444355556 \end{aligned}$$

Er lijkt inderdaad een structuur in deze getallen te zitten; voor het bewijs van die structuur, zie het kader op de volgende pagina. Hiermee is de volgende opdracht voor de Junior Wiskunde Olympiade (dat is de finale van de Kangoeroewedstrijd voor brugklassers en tweedeklassers) geboren:

JWO 2023 – OPDRACHT B5

We bekijken het getal 666...666 dat uit 2023 zessen bestaat. Het kwadraat van dit getal heeft 4046 cijfers. Hoeveel van die cijfers zijn een 5?

Deelnemers kunnen deze vraag alleen oplossen als ze zich verplaatsen in het hoofd van de opdrachtmaker. Ze moeten zich realiseren dat de oplossing verstopt zit in de simpelere kwadraten 6^2, 66^2, 666^2, enzovoort. Hier komt het advies vandaan om gerelateerde, simpelere problemen te bekijken. Met dit voorbeeld in het achterhoofd kunnen we dit advies als volgt formuleren: "Welke simpelere problemen zou de opdrachtenmaker gebruikt kunnen hebben om tot dit probleem te komen?" Ik daag je uit om met die vraag in het achterhoofd te kijken of je het volgende probleem kunt oplossen:

1E RONDE WO 2023 OPDRACHT B1

Albert maakt een rijtje getallen, waarvan de eerste 2023 precies de getallen 1 tot en met 2023 zijn, in een of andere volgorde. Om elk volgend getal te bepalen, neemt Albert de mediaan van de 2023 voorgaande getallen. Je vindt de mediaan van 2023 getallen door ze op grootte te sorteren en van dat rijtje precies het middelste getal te nemen. Hoeveel verschillende waarden kan het drieduizendste getal van Alberts rij hebben?

EEN SIMPEL SPELLETJE

Bij de eerste opdracht zagen we dat een patroon in achtereenvolgende kwadraten tot het wiskundige probleem leidde. Bij de tweede opdracht is dit een simpel spelletje dat een leerling een keer deed toen hij zich verveelde. Deze leerling begon met een rijtje van getallen, zeg 1, 3, 2, 5, 4. In iedere volgende stap voegde hij de mediaan van de rij op het eind toe en streepte hij het eerste getal van het rijtje weg. Dit leidt tot de volgende rijtjes:

1,3,2,5,4
3,2,5,4,3
2,5,4,3,3
5,4,3,3,3
4,3,3,3,3
3,3,3,3,3

Vanaf dit punt zal het rijtje altijd uit drieën blijven bestaan. Het is gemakkelijk te bewijzen dat dit effect altijd zal optreden als je met een oneven aantal getallen begint. Dit spelletje leidde tot de vraag in de opdracht en het is nu duidelijk dat het 3000ste getal in de rij van Albert alleen 1012 (de oorspronkelijke mediaan) kan zijn.

Bij beide Olympiade-problemen zie je dus dat de opdrachtmaker van een simpele observatie een mooi probleem maakt door de getallen te vergroten. Als oplosser

HET ANTWOORD BEWIJZEN

In dit artikel sla ik één stap over die wij als opgavemakers altijd doen voor we een opdracht in een wedstrijd zetten. We willen namelijk 100% zeker weten dat het patroon dat we in de getallen zien ook optreedt bij $666...666^2$ (met 2023 zessen). Het mag immers niet voorkomen dat ons antwoord niet blijkt te kloppen. Hiervoor kijken we nog een keer naar 6666^2:

$$\begin{array}{rl} 6666 & \\ \underline{6666} & \times \\ 39996 & \\ 399960 & \\ 3999600 & \\ \underline{39996000} & + \end{array}$$

Voor de optelling kunnen we natuurlijk de getallen optellen om tot 44435556 te komen. Dit geeft ons echter geen enkele garantie dat het patroon zich doorzet. Na wat spelen kwam ik echter op het idee om 39996 (de eerste regel in de berekening) op te splitsen in $30006 + 90 + 900 + 9000$. De 90 tellen we op bij de 399960, de 900 tellen we op bij de 3999600 en de 9000 tellen we op bij de 39996000.

Als we dat doen, verandert onze som in:

$$\begin{array}{rl} 6666 & \\ \underline{6666} & \times \\ 30006 & \\ 400050 & \\ 4000500 & \\ \underline{40005000} & + \end{array}$$

Door de optelling zo te doen, is het meteen duidelijk dat we inderdaad 44435556 als uitkomst krijgen.

BONUSOPDRACHT

Bereken op een soortgelijke manier $66666 \cdot 66666$ door bij het optellen de bovenste 399996 te splitsen in $300006 + 90 + 900 + 9000 + 90000$ en iedere term bij een handige regel op te tellen.
Op dezelfde manier kunnen we bij het kwadraat van het getal met 2023 zessen de eerste regel 3999...9996 opdelen in $3000...0006 + 90 + 900 + 9000 + ...$ en iedere term bij de corresponderende regel optellen. Er ontstaat dan een soortgelijk patroon als hierboven en het kwadraat uit de opdracht zal dus inderdaad bestaan uit 2022 vieren, één drie, 2022 vijven en één 6.

verklein je de getallen weer om het patroon terug te vinden dat de opdrachtmaker gebruikt heeft om de opdracht te verzinnen.

De uitdaging bij het verkleinen is dat je naar de juiste grootte moet vereenvoudigen om het patroon te vinden. Zo zie je bij het eerste probleem nog weinig bij 6^2 en 66^2 en moest je bij het tweede probleem kijken naar een rij met een oneven aantal getallen. Aan de hand van de moeilijkste opdracht van de afgelopen Junior Wiskunde Olympiade zal ik een aantal valkuilen bespreken waar je rekening mee moet houden bij het kiezen van hoe ver je versimpelt.

JWO 2023 – OPDRACHT B8

Ikram heeft een grote kom met balletjes erin. Op elk balletje staat een positief geheel getal. Als hij willekeurig drie balletjes uit de kom pakt en het verschil tussen het grootste en het kleinste getal op deze drie balletjes neemt, dan blijkt dat de uitkomst altijd ook op één van de balletjes in de kom staat (of op één van de drie balletjes die hij net gepakt heeft). Hij doet steeds de balletjes weer terug in de kom. Hij weet dat er in elk geval balletjes met 3, 6 en 2023 in de kom zitten. Hoeveel balletjes zitten er minimaal in de kom?

OPLOSSINGSSTRATEGIE

Het getal dat nu irritant groot is, is 2023. Voor het oplossen gaan we dit getal dus maar eens verkleinen tot iets werkbaars. De vraag is alleen naar welke getal? De valkuilen zijn:

- **Het getal mag niet te groot zijn.** Als we 2023 naar bijvoorbeeld 100 verkleinen, zijn we nog steeds te lang bezig met het versimpelde probleem oplossen. De regel bij het verkleinen is dat je het zover moet verkleinen dat je het probleem gemakkelijk op papier kunt uitwerken.
- **Het getal mag niet te klein zijn.** Als we 2023 naar bijvoorbeeld 7 verkleinen, gaat een deel van de structuur verloren. De hint is hier dat 2023 heel veel groter is dan 3 en 6 en het is niet zo gek dat dit voor het patroon van de opdracht ook belangrijk is.
- **Het getal mag niet deelbaar door 3 zijn.** Als we 2023 vereenvoudigen naar een veelvoud van 3, kunnen we alleen de veelvouden van 3 maken. Omdat 2023 een drievoud plus 1 is, ligt het voor de hand om ook te vereenvoudigen naar een drievoud plus 1.

Het perfecte getal om naar te verkleinen, blijkt in dit geval 13 te zijn. Dit is het laagste getal dat de volledige structuur behoudt. Het is echter niet erg als je niet direct goed kiest. Als je hoger kiest, kom je als het goed is (met wat meer werk) op hetzelfde patroon uit. En als je lager kiest, vind je geen structuur die je kan veralgemeniseren en moet je dus alsnog een hoger getal kiezen.

Als we beginnen met 3, 6 en 13 vinden we dat achtereenvolgens de volgende getallen in de kom moeten zitten:

- 10 door de balletjes 3, 6 en 13 te pakken
- 7 door de balletjes 3,6 en 10 te pakken
- 4 door de balletjes 3, 6 en 7 te pakken
- 9 door de balletjes 4, 6 en 13 te pakken
- 5 door de balletjes 4, 6 en 9 te pakken
- 2 door de balletjes 3, 4, en 5 te pakken
- 8 door de balletjes 2, 5 en 10 te pakken
- 11 door de balletjes 2, 5 en 13 te pakken

We zien dat we bij 3, 6 en 13 alle positieve gehele getallen tot en met 13 kunnen maken behalve 1 en 12. Met dit gegeven is het in te zien dat je bij 2023 ook alle getallen tot en met 2023 kunt maken behalve 1 en 2022. Dit geeft dus het antwoord 2021. <

ZELF MEEDOEN?

De opdrachten uit dit artikel komen uit de Wiskunde Olympiade en de finale van de Kangoeroewedstrijd. Aan beide wedstrijden kun je in dit voorjaar weer meedoen op je eigen school. De Wiskunde Olympiade is voor leerlingen uit klas 1 tot en met 5 en vindt tussen 22 januari en 2 februari 2024 plaats. De Kangoeroewedstrijd heeft edities voor leerlingen op de basisschool tot en met studenten op de universiteit. Deze wedstrijd vindt plaats op donderdag 21 maart 2024. Vraag je wiskundedocent meer informatie.